Matematyka nr 3, 1996

WACŁAW ZAWADOWSKI

Czy matematyka daje nam język?

Jan Konior [9] pisze o posługiwaniu się przez uczniów znakiem równości i zauważa, że opanowywanie konwencji posługiwania się znakami matematycznymi przypomina proces przyswajania podstawowych reguł **języka rodzimego**, a więc dzieje się bez jawnego opisywania tych reguł.Na potwierdzenie tego przytacza szereg interesujących przykładów posługiwania się przez uczniów znakiem równości. Tym artykułem weszliśmy na łamach *Matematyki* na bardzo ważny teren badań współczesnej dydaktyki matematyki. **Matematyka jako język** to jest coś więcej niż teoria, to jest aktualnie rozwijający się, szeroki program badań w dydaktyce matematyki.

W latach osiemdziesiątych dość spontanicznie zrodził się pewien ruch i program badań, któremu jest na imię „**Matematyka jako język**". Jest już spora literatura dotycząca takiego spojrzenia na matematykę. Można tu wymienić takie nazwiska jak John Mason, David Pimm, Valerie Walkerdine i wiele innych.

Każdy dostatecznie bogaty system znaków, używany nie przez maszyny a przez ludzi, zaczyna nabierać tych cech, które spotykamy w językach naturalnych. W takich systemach oprócz **umów jawnych**, co do znaczenia znaków zaczynają działać **umowy niejawne**, przyjmowane spontanicznie, podświadomie i milcząco. Systemy znaków używanych w matematyce nie są tu wyjątkiem. Każdy taki system, który jest językiem ma też swoją **semantykę i swój świat dyskursywny** (universe of discourse). W świecie dyskursywnym istnieją dziwne rzeczy, o których każdy użytkownik języka wie, że nie istnieją „naprawdę". Przykładem może być Pegaz, Czerwony Kapturek lub jakakolwiek inna postać z bajki, czy mitologii ale nie tylko.

W języku potocznym możemy mówić o rzeczach, które istnieją lub które nie istnieją ale „przychodzą nam do głowy" gdy mówimy, a przez sam akt wymówienia wchodzą do tego **uniwersum dyskursu**. Niektóre z nich mają trwalszy charakter i pozostają jako idee, inne odchodzą i znikają bezpowrotnie.

O obiekty matematyczne nie można sobie „nabić guza", są to obiekty myślowe, **idee**. Języki potoczne nie mają takich ograniczeń. Wydaje się, że można w nich mówić niemal o wszystkim, a każda wypowiedź może wpływać na znaczenie w niej zawartych słów i powoływać byty w uniwersum dyskursu do istnienia.

Co język to Nowy Świat.

Matematyka wraz z jej symboliką może być używana jak język, ale ma dużo **ostrzejsze kryteria istnienia** dla rzeczy, o których opowiada. Matematyka to nie jest język, ale ma swój język, a może wiele języków. Język matematyki, i ten formalny, i ten nieformalny jest tylko jednym z jej aspektów. O formalnych językach związanych z matematyką pisano już wiele. Tu raczej rozważamy ten nieformalny język jaki tworzą znaki i symbole matematyczne używane przez człowieka. Chodzi też nie o byle kogo, a o **kompetentnego użytkownika** tego języka. Kogoś, kto być może nieformalnie, ale rozumie ten język. Oczywiście ten ktoś nie musi ogarniać całej matematyki, tak jak ktoś, kto jest kompetentnym użytkownikiem np. języka polskiego nie musi znać wszystkiego związanego z tym językiem. Przeciwnie, chodzi tylko o to, żeby **czuł** ten język. Język w tym znaczeniu, to nie tylko martwa konstrukcja z reguł i znaków, ale te jawne i niejawne umowy, może nawet reguły, semantyka i kompetentny użytkownik. Język w tym znaczeniu jest **biologiczną** właściwością człowieka. To nie jest tylko system. To jest **system znaków i człowiek**, który potrafi tego systemu używać i ten system wyczuwa.

Warto się zastanowić kiedy system znaków można uznać za język, a kiedy jeszcze nie. Nie ma tu jasnej odpowiedzi. Zagadnienie znalezienia adekwatnego modelu matematycznego dla języków naturalnych jest jednym z najpoważniejszych zagadnień naszych czasów.

Na jakiej podstawie można stwierdzić np. czy małpy wychowywane z ludźmi, które nauczyły się posługiwania migowym kodem mają już coś, co można nazwać językiem, czy jeszcze nie. Mogą powiedzieć „jestem głodna", „boję się", „to nie ja", „to on", uczą tego swoje dzieci. Kłamią. Chyba więc mówią, skoro potrafią kłamać – budują swój niezależny świat. Kłamią, więc mówią. Z drugiej strony, potrafią tworzyć tylko bardzo proste konstrukcje.

Gdy traktujemy matematykę jako **formalną konstrukcję** logiczną wtedy większość takich przypadków użycia znaków matematycznych jak

$$2 + 3 =$$

musimy traktować jak niedokończone zdania, lub coś, co jest źle sformułowane i nie jest **poprawną formułą**, a dla niepoprawnych formuł nie ma miejsca w takiej formalnej matematyce i trzeba je traktować jak niepoprawności, czyli po prostu błędy.

Można jednak patrzeć na to inaczej.

Gdy traktujemy matematykę jak język wtedy i w matematyce możemy poszukiwać tych efektów, które znane są w językach naturalnych. Te efekty, które mam na myśli, to przede wszystkim figury stylu, przenośnie, dwie podstawowe: **metafory**, **metonimie**, a także cały szereg innych: **sylepsy**, **synekdochy**, **zegmy**, których tu wszystkich nie wymienię oraz występowanie w symbolice matematycznej specyficznych **idiomów**.

Metafora w sensie szerszym jest w ogóle dowolną figurą stylu, przenośnią, zwrotem, tropem. W sensie węższym, takim jakiego tu używamy i jakiego użył Arystoteles, gdy zauważył ten efekt językowy po raz pierwszy, metafora jest wyrażeniem, zbitką słów, która jest naruszeniem normy, dewiacją, która byłaby błędem, gdyby nie to, że spełnia pewną szczególną funkcję. Powstaje mianowicie nowe znaczenie. Lokutor zwykle tworzy metafory w pełni świadomie i z pewną wizją, poprzez podobieństwo lub analogię („ucho czajnika" zamiast „uchwyt", „chmurka punktów" zamiast „pewien zbiór pozornie bezładnie rozmieszczonych punktów"). Często, ale nie zawsze metafora ma budowę złożoną z dwóch członów: rzeczownik (nazwa) i przymiotnik (człon atrybutywny). Ucho czajnika nie jest uchem. W tym wypadku człon atrybutywny jest na drugim miejscu i wskazuje wyraźnie na to, że pierwszy człon nie może być interpretowany dosłownie i trzeba szukać innej rozszerzonej interpretacji. Zwrot „trójkąt sferyczny" od razu budzi czujność: na płaszczyźnie wszystkie trójkąty są płaskie. Trójkąt sferyczny nie jest więc trójkątem, a przynajmniej nie jest zwykłym trójkątem. Słowu „trójkąt" trzeba nadać nowy sens, żeby je „przełknąć", asymilować, „strawić", zrozumieć. Gdyby ten nowy sens potraktować formalnie, wtedy za każdym razem trzeba dawać do zrozumienia, czy mówimy o trójkącie płaskim, na płaszczyźnie, czy sferycznym, czy w ogóle o „trójkącie w nowym sensie". Kula u nogi. Narażamy się na ogromną terminologiczną niezgrabność. Lepiej już nie ruszać tego ustalonego znaczenia słowa „trójkąt". Potraktować zwrot „trójkąt sferyczny" jak metaforę i za dużo nie wyjaśniać, bo może się przez to „ściemnić".

Metonimia, jako efekt językowy została opisana przez Cycerona. Jest to naruszenie normy, tworzone podświadomie dla wyrazistości przekazu, gdzie w celu przekazania znaczenia,które jest jasne zarówno dla mówiącego jak i odbiorcy używa się słowa, które jest „na końcu języka", znaku, który jest „pod ręką", który jest użyty „przez styczność" (by being mentally at hand, „bei Vorhandensein", np. „kupiłem Białynickiego" zamiast „kupiłem Algebrę liniową z geometrią", „rozmawiałem z Nowym Yorkiem" zamiast „z ciotką, która mieszka w Nowym Yorku"). Przy metonimii nie powstaje żadne nowe znaczenie, które nie byłoby znane, dla rozmówców. Dewiacja, polegająca na chwilowym zapożyczeniu zgrabnego znaku podkreśla ich więzy. Poprzez zgrabne przesunięcie nazwy dają sobie znać, że nie boją się pewnego rozluźnienia w komunikowaniu się. Ta funkcja metonimii to coś takiego jak „jazda bez trzymanki na rowerze". Gdy naruszenie normy zostanie przywołane do świadomości, następuje efekt zdziwienia z tendencją do skorygowania „błędu", który oczywiście błędem nie jest, a najczęściej drobną nieścisłością. Metonimia może służyć do ustawienia precyzji przekazu (być może nie chcę ujawnić z kim rozmawiałem w czasie połączenia z Nowym Yorkiem lub nie jest to istotne, więc nie chcę tym zawracać głowy). Charakterystyczne dla metonimii jest **przesunięcie** funkcji referencjalnej znaku (z „Białynickiego" na jego znany podręcznik, z „Nowego Yorku" na ciotkę, która tam mieszka). Metonimia wywołuje skupienie uwagi na znaczeniu, efekt lokalizacji, zogniskowania. Ten efekt jest raczej przeciwny do efektu rozlanej wizji, który wywołuje metafora. Przykładem przesunięcia funkcji referencjalnej może być użycie reprezentanta zamiast całej klasy równoważności i często jest przyjmowane niejawnie. Można to wtedy uważać za przykład figury metonimicznej w matematyce. Ujawnienie tego zwykle spowoduje wycofanie się poprzez sprecyzowanie definicji lub zmianę tematu lub śmiech. Figura metonimiczna znika.

Metonimia często wyzwala coś w rodzaju „energii psychicznej", która jeżeli nie znajdzie żadnego innego „pożytecznego" ujścia, powoduje śmiech.

Prawdziwe figury stylu są spontaniczne. Idiomy to zwykle już tylko ślady po takich autentycznych figurach. To takie figury, które się przyjęły i zostały zaakceptowanymi zwrotami w języku. Taką spetryfikowaną figurą stylu jest znak równości „=" w znaczeniu „proszę o wynik". To jest „spetryfikowana" metonimia. Występuje niemal w każdym kalkulatorze i w niezliczonych zeszytach szkolnych na całym świecie. Taki charakter ma też użycie liter zamiast liczb, np: $\boldsymbol{a+b}$. Piszemy litery, ale myślimy o liczbach i wtedy oczywiście znak „+" ma sens, dla liter raczej nie ma sensu. Przesunięcie funkcji referencjalnej z liter na liczby jest istotne.

Wyrażenie $\boldsymbol{2a+2}$ ma charakter zegmy lub sylepsy. Znak „**2**" występuje tu w dwóch znaczeniach, raz jako powtórzenie $\boldsymbol{a+a}$, drugi raz jak liczba **2**. Pod względem struktury wyrażenie $\boldsymbol{2a+2}$ można porównać z wyrażeniem potocznym „wpadł w długi i do studni", a także „stracił głowę i zegarek", „splamił honor i ubranie", „czarna suknia, godzina i plama na krowie".

Oczywiście my „dojrzali dorośli" patrzymy na takie wyrażenia jak $\boldsymbol{2a+2}$ inaczej, ale gdy ktoś się tego po raz pierwszy uczy, czego przedtem nie doświadczył, to nie wie tyle, co my i przyjmuje takie konwencje w sposób niejawny, figuratywny. Wymaga to trochę czasu i kontaktu z „dobrymi wzorcami". Z jednej strony nie możemy algebry szkolnej traktować formalnie, bo byłaby zbyt trudna, zbyt abstrakcyjna. Z drugiej strony postępując nieformalnie musimy podać olbrzymią ilość przykładów o charakterze paradygmatycznych wzorców.

Nie możemy przecież w szkole opowiadać o pierścieniach dwóch zmiennych, np. $R[a,b]$, gdzie wszystkie takie wyrażenia $\boldsymbol{a+b}$, $\boldsymbol{2a+2}$ mają swoje miejsce jak w platońskim raju. Jest to jedno z możliwych wyjaśnień dlaczego algebra szkolna jest dla wielu osób taka trudna.

Misterium nadania znaczenia najprostszemu równaniu nie jest łatwe, w wyrażeniu $\boldsymbol{x=3}$ po jednej stronie mamy zmienną, a więc nie liczbę, a po drugiej liczbę, więc nie zmienną. Jak więc nauczyć kogoś posługiwania się równaniami? Pokazać jak to się robi, czy definiować? Najlepiej „zamknąć oczy", za dużo nie tłumaczyć i zdać się na zdrowy rozsądek. Człowiek zrozumie, czego „żaden komputer" nie przyjmie.

Ze strony nauczyciela jest to oznaką dużej profesjonalnej kompetencji, jeżeli te niejawne umowy podejmowane są z pełną świadomością. Często jednak i nauczyciel nie jest pewien jak ze sprawy wybrnąć, gdy uczniowie są dociekliwi. Zdaje się więc na wzorce, paradygmaty i dużą liczbę „wprawek", aż rutyna stanie się drugą naturą. W końcu może użyć metafory: „równanie jest zagadką" zgadnij, czym jest to x. Równanie traktuje się wtedy jak rebus do rozwiązania.

Po łacinie *res*, *rebus* po polsku *rzecz*, po włosku *cosa*, stąd tych, co posługiwali się równaniami nazywano w czasach Odrodzenia *„kosistami"*, zamiast $x = 3$ napisano by w czasach Odrodzenia *res aeq. tres*, lub *res aeq.*3, lub *cosa aeq.*3. Dzisiaj słowo *rebus* znaczy zagadka.

Znak równości w obecnej postaci dwóch równoległych kresek wprowadził Robert Recorde w swojej książce *The Whetstone of Witte* w roku 1557. Uzasadniał to w taki sposób jakby był znudzony częstym powtarzaniem słów „jest równe".

„Aby uniknąć powtarzania tych słów „jest równe" będę używał dwóch kresek jednakowej długości, tak: =, bo nic nie może być bardziej równe niż dwie równoległe linie jednakowej długości".

Dzięki temu zapiskowi wiemy dlaczego Robert Recorde wybrał taki znak, rysunek dwóch równoległych odcinków jednakowej długości został użyty metaforycznie jako symbol równości. Wiemy co myślał, gdy go tworzył. Zapis wydaje się być wiarygodny.

Dzisiaj odbieramy ten znak jak całość i w żadnym wypadku nie dopatrujemy się w nim równoległych kresek jednakowej długości.

Użycie przekazu figuratywnego przez ucznia może być symptomem głębszego rozumienia spraw, niż ten, który by wynikał li tylko z dosłownych sformułowań. Mogą się o tym często przekonać ci, którzy badają dialogi uczniów lub studentów.

Ze znakiem równości wiążemy zwykle relację zwrotną symetryczną i przechodnią, **ale dla ucznia być może nie jest to pierwotny sens tego znaku**. Być może pierwsze zetknięcie i to, które wywarło zasadnicze wrażenie jest tym „podaj wynik", „oblicz", lub w końcu „zrób coś". Tak właśnie wskazują badania Carolyn Kieran. Nie należy zatem mówić, że uczniowie „popełniają" tu błędy, nie ma w tym ich winy. Po prostu tak czynią, bo tak ich przyzwyczajono. Z naszego punktu widzenia są to błędy, ale niezawinione błędy. Po prostu je **robią**, a nie **„popełniają"**. To nie są ani występki, ani zbrodnie. Na pewnym etapie zobaczą inne aspekty znaku „=". Być może przeżyją to świadomie jak metaforę lub przełkną jak metonimię.

Metonimia jest używana w języku potocznym i w literaturze dla złagodzenia nieprzyjemnego efektu, np. w pytaniu „skąd ten zapach?" zamiast po prostu „smród" lub odsunięcia od siebie jakiegoś wykroczenia, np. gdy ktoś pisze „mijałem się z prawdą na kłamliwym papierze...".

Zwroty metonimiczne są używane w zdaniach, np. „podaj największą liczbę dwucyfrową" zwykle nie budzi wątpliwości, mimo że słowo „cyfra" użyte jest w znaczeniu „miejsce dziesiętne zajmowane przez cyfrę". Zwykłą odpowiedzią jest liczba 99. Ale zapytanie „czy największa liczba dwucyfrowa jest dwucyfrowa, czy jednocyfrowa? przyjmowane jest jak żart. W tym pytaniu występuje **sylepsa**, słowa „dwucyfrowa" i „jednocyfrowa" występują w jednym zdaniu w dwóch znaczeniach. Z jednej strony kandyduje 99, ale w jej zapisie występuje tylko jedna cyfra, 9, co prawda na dwóch miejscach, więc dwa razy, ale nie da się ukryć, że tylko jedna. Gdy żądamy dwóch różnych cyfr, wtedy pojawia się na scenie 98. Ale cyfra, to pojęcie matematyczne, a w „żargonie" matematycznym dwa obiekty bardzo często okazują się jednym i tym samym obiektem. Więc w końcu 99 czy 98?

Ujawniona sylepsa powoduje, że metonimia znika i następujący efekt „migotania" znaczenia traktowany jest jak żart. Z drugiej strony spotyka się zadania w rodzaju „za pomocą dwóch cyfr „1" i „2" napisz największą liczbę trzycyfrową". Zadania takie funkcjonują całkiem dobrze aż do momentu, gdy nie nastąpi ujawnienie występujących w nich zwrotów metonimicznych. Zwykle wtedy autorzy zaczynają poprawiać takie zadania i zwykle – wyczesując metonimię – gubią dowcip.

Mówiłem o żargonie matematycznym. Sprawa jest poważna. Mówiąc matematycznie używamy języka polskiego w inny sposób niż zwykle, a te same słowa nabierają innego znaczenia i często inaczej się łączą z innymi słowami. Takie obszary semantyczne, w których używa się języka w pewien specjalny sposób, i w których mogą wystąpić specjalne symbole i znaki nazywane są przez niektórych **ramką** (frame). Są też używane inne nazwy, np. *skrypt* (script, register), *obszar subiektywnych przeżyć* (Subjektive Erfahrungsbereiche) i inne. Mówiąc o matematyce w sposób *matematyczny* uruchamiamy taką matematyczną ramkę. Ale możemy mówić *matematycznie* nie o matematyce, a również możemy mówić i myśleć o matematyce *niematematycznie*. I dzieci, i uczniowie, i nauczyciele, i my wszyscy często mówimy o matematyce *niematematycznie* i nie jest to błąd. Uczymy się też mówić *matematycznie*, staramy się. Matematycy umieją mówić *matematycznie*.

Na zakończenie muszę prosić o wyrozumiałość. Zwrot „kłamią, a więc mówią" jest oczywiście przenośnią, a nawet przesadnią, hiperbolą, już niech będzie – sloganem. Odwracając przyjęty paradygmat, Lacan mawiał, że „język stwarza świat". Człowiek bez języka jest zdany na bezład i chaos nieuporządkowanych wrażeń, które bombardują jego zmysły. Język pomaga kategoryzować te doznania i jest środkiem wymiany wrażeń w danej kulturowej grupie, określonej przez język. Dlatego język jest taki ważny. Gdy opanujemy język, widzimy świat poprzez ten język, a co widzimy, czego doznajemy, doświadczamy, to opisujemy w tym języku. Dla innych, dla siebie. Każdym nowym przyswojonym słowem uniezależniamy się od Natury. Lacan mówił: „z każdym nowym słowem o krok dalej od matczynej piersi, o krok dalej Mamy". W trakcie edukacji nie jest to tylko tak, że poznajemy Świat i opisujemy go w swoim języku. Nie, na odwrót: poznajemy język, **a język stwarza świat**.

LITERATURA

[1] Arystoteles, *Poetyka*, 1457b, 1459a–5, s.356, PWN 1988.
[2] H. Bauersfeld i W. Zawadowski, *Metafory i metonimie w nauczaniu matematyki*, Dydaktyka Matematyki, t.8 (1988), s.155–186.
[3] H. Broekman, *Zmieniający się obraz matematyki szkolnej dla młodzieży w wieku* 10–16 *lat*, SNM 1995.
[4] R. Davis, i P.J. Hersh, *Świat matematyki*, PWN, 1994.
[5] T. Dobrzyńska, *Metafora*, IBL PAN, Wydawnictwo PAN, Ossolineum 1984.
[6] M. Donaldson, *Myślenie dzieci*, Biblioteka Wiedzy Współczesnej Omega, Wiedza Powszechna 1986.
[7] R. Jakobson, *W poszukiwaniu istoty języka*, PIW 1989, s. 115–175.
[8] C. Kieran, *Concepts associated with equality symbols*, Edu. Studies in Maths 12, 317–326, 1981.
[9] J. Konior, *Posługiwanie się przez uczniów znakiem równości w wyrażeniach matematycznych*, *Matematyka* 4 (248), 1994, s. 220–227.
[10] G. Lakoff i M. Johnson, *Metafory w naszym życiu*, „Seria z nieskończonością", PIW 1988.
[11] J. Malczewski, *Szkolny słownik terminów nauki o języku*, WSiP, 1979.
[12] F. de Saussure, *Kurs językoznawstwa ogólnego*, Warszawa 1961.
[13] L. S. Wygotski, *Narzędzie i znak w rozwoju dziecka*, PWN 1978.
[14] B. L. Whorf, *Język, myśl i rzeczywistość*, „Seria z nieskończonością", PIW 1982.

Dalsze odniesienia do literatury dostępne na żądanie od autora.